ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Définissez, commentez et illustrez ce qu'est, pour vous, une éducation réussie.

Sujet n° 2

« Mon plus gros défi pour gagner est de convaincre les Libériens qu'une femme est assez forte pour imposer sa volonté dans ce pays », à partir de cette citation de Ellen Johnson-Sirleaf, présidente du Liberia depuis janvier 2006, vous réfléchirez à la place des femmes en politique.

Sujet n° 3

« En démocratie, douter des vérités reçues est une vertu critique » Elie Wiesel, « La Cité des hommes », *Le Monde*. Qu'en pensez-vous ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET D'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE-SÉNÉGAL

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

1$^{\text{ère}}$ COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les résultats seront encadrés.

E désigne un espace vectoriel complexe de dimension n, $(n \geq 1)$.

Partie I

Dans cette partie on étudie les propriétés spectrales d'une application semi-linéaire.
Une application u de E dans lui-même est dite semi-linéaire si elle possède la propriété suivante :

Pour tout scalaire a et tout couple de vecteurs x et y de l'espace vectoriel E la relation ci-dessous est vérifiée :

$$u(a\ x + y) = \overline{a}\ u(x) + u(y).$$

Le nombre complexe $\bar{a}$ est le nombre complexe conjugué de a.

Un nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u s'il existe un vecteur x différent de 0 tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$u(x) = \mu\ x.$$

Le vecteur x est un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre μ.

Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E.

a. Démontrer qu'étant donné un vecteur x, différent de 0, appartenant à l'espace E, il existe au plus un nombre complexe μ tel que $u(x) = \mu\ x$.

b. Soit E_μ l'ensemble des vecteurs x de l'espace vectoriel E qui vérifient la relation $u(x) = \mu\, x$:

$$E_\mu = \{x \ : \ u(x) = \mu\, x\}$$

E_μ est-il un espace vectoriel réel ?

c. Soit μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u. Démontrer que pour tout réel θ, le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore une valeur co-propre de u.

d. L'ensemble E_μ est-il un espace vectoriel complexe ?

e. Étant données deux applications semi-linéaires u et v, étudier la linéarité de l'application composée $u \circ v$.

Partie II

Soient u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de l'espace vectoriel E. A un vecteur x, de coordonnées $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est associée une matrice-colonne X d'éléments $x_1, x_2, \cdots, x_n$ appelée (abusivement) vecteur.

a. Démontrer qu'à l'application semi-linéaire u est associée dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E une matrice A, carrée, complexe, d'ordre n, telle que la relation $y = u(x)$ s'écrive :

$$Y = A.\overline{X}.$$

La matrice-colonne $\overline{X}$ est la matrice complexe conjuguée de la matrice-colonne X.

b. Soient A et B les matrices associées à une même application semi-linéaire u respectivement dans les bases $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ de E. Soit S la matrice de passage de la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ à la base $(f_i)_{1\leq i\leq n}$. Exprimer la matrice B en fonction des matrices A et S.

Étant donnée une matrice carrée A, complexe, d'ordre n, le vecteur X, différent de 0,($X \neq 0$) est un vecteur co-propre de la matrice carrée A, associé à la valeur co-propre μ, si le vecteur X et le nombre complexe μ vérifient la relation matricielle ci-dessous :

$$A.\overline{X} = \mu X.$$

Dans la suite toutes les matrices considérées sont des matrices carrées complexes.

c. Soit A la matrice d'ordre 2 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rechercher les valeurs co-propres μ et les vecteurs co-propres $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ associés.

d. Démontrer que, si une matrice A est réelle et admet une valeur propre réelle λ, cette matrice a au moins une valeur co-propre.

Partie III

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n et T une matrice triangulaire supérieure (les éléments situés en-dessous de la diagonale principale sont nuls).

a. Démontrer que, si le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A, le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $A.\overline{A}$.

b. Soient λ une valeur propre positive ou nulle ($\lambda \geq 0$) de la matrice $A.\overline{A}$ et X un vecteur propre associé :

$$A.\overline{A}X = \lambda X.$$

Démontrer que le réel $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de la matrice A en envisageant les deux cas suivants :

- les vecteurs $\overline{A}.X$ et X sont liés ,
- les vecteurs $\overline{A}.X$ et X sont indépendants.

c. En déduire que le réel positif ou nul μ est une valeur co-propre de la matrice A, si et seulement si le réel μ^2 est une valeur propre de la matrice $A.\overline{A}$.

d. Soit λ est une valeur propre de la matrice T. Démontrer que pour tout réel θ, le nombre complexe $\lambda e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice T.

e . Soit μ est une valeur propre de la matrice T. Démontrer qu'il existe un réel θ tel que le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ soit valeur propre de la matrice T.

f. Soit S la matrice définie par :

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Démontrer que 1 est valeur co-propre de cette matrice et déterminer un vecteur X co-propre associé. Poser :

$$X = \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix}.$$

g. Soient B et C les matrices réelles définies par la relation suivante :

$$A = B + iC.$$

Démontrer que le nombre complexe μ est une valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre réel $|\mu|$ est une valeur propre de la matrice D, carrée réelle d'ordre $2n$, définie par blocs par la relation suivante :

$$D = \begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix}.$$

Partie IV

On dit qu'une matrice A d'ordre n est co-diagonalisable s'il existe une matrice P inversible telle que la matrice $P.A.\overline{P}^{-1}$ soit diagonale.

1. Montrer que si A est co-diagonalisable alors la matrice $A.\overline{A}$ est diagonalisable avec des valeurs propres positives ou nulles et que le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A.\overline{A}$.

On suppose maintenant qu'une matrice carrée complexe A d'ordre n vérifie les trois propriétés suivantes :

i) la matrice $A.\overline{A}$ est diagonalisable,

ii) les valeurs propres de la matrice $A.\overline{A}$ sont positives ou nulles,

iii) le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A.\overline{A}$.

En vue de ii), soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, les valeurs propres, deux à deux distinctes, de la matrice $A.\overline{A}$; elles sont positives et ordonnées de façon quelles vérifient la relation suivante :

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k \geq 0.$$

Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, ont respectivement les multiplicités $n_1, n_2, \cdots, n_k$. Soit I_p la matrice identité d'ordre p. Une matrice diagonale Λ semblable à la matrice $A.\overline{A}$, s'écrit par blocs avec les conventions précédentes sous la forme suivante :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix}$$

Par hypothèse il existe une matrice P inversible telle que

$$A.\overline{A} = P.\Lambda.P^{-1}.$$

Soit B la matrice définie par la relation suivante :

$$B = P^{-1}.A.\overline{P}.$$

2. Les relations suivantes sont-elles vérifiées ?

$$B.\overline{B} = \overline{B}.B \; ; \; B.\Lambda = \Lambda.B.$$

3. Démontrer que la matrice B s'écrit par blocs sous la forme ci-dessous ; dans cette expression chaque matrice B_p est une matrice d'ordre n_p de la forme

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix}$$

4. Démontrer qu'il existe une matrice inversible Q et une matrice diagonale D d'ordre n telles que la relation ci-dessous ait lieu :

$$B = Q.D.\overline{Q^{-1}}.$$

Conclure que toute matrice vérifiant les hypothèses $i), ii)$ et $iii)$ est co-diagonalisable.

5. Soit S une matrice symétrique réelle d'ordre n, S est-elle co-diagonalisable ?

Soient B, C, D et E les matrices d'ordre 2 suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? co-diagonalisables ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Dans toute cette épreuve, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

1. Montrer que les fonctions $\cos x\, Ln\,(\sin x)$ et $\cos x\, Ln(tg\, x)$ sont intégrables sur l'intervalle $]0, \pi/2[$, où $Ln(x)$ désigne le logarithme népérien de x.

2. Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos x\, Ln(\sin x) dx$.

3. Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos x\, Ln(tg\, x) dx$.

Exercice n° 2

Soit la fonction gamma définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$

1. Quel est le domaine de définition de cette fonction ?

2. Calculer $I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} (1 - \frac{t}{n})^n dt$ en fonction de x et n.

3. Calculer $\underset{n\to\infty}{Lim} (1 - \frac{t}{n})^n$.

4. Montrer que $\Gamma(x) = \underset{n\to\infty}{Lim} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)...(x+n)}$

Exercice n° 3

Soit $y(x)$ une fonction deux fois continument dérivable définie sur R. On considère l'équation différentielle suivante :
$y''(x)+xy'(x)+2y(x)=0$ avec les conditions : $y(0)=0$ et $y'(0)=-1$

1. Vérifier que $y(x)=-xe^{-x^2/2}$ est solution de l'équation différentielle précédente.

2. Quelles sont les fonctions numériques continues qui vérifient :

$$f(x)=-1-\int_0^x (2x-t)\,f(t)\,dt$$

Exercice n° 4

Pour $k>1$ et $x\in R$ positif, on pose

$$f_k(x)=\frac{\left((k-1)x+1\right)^{k/k-1}-kx-1}{k}$$

et

$$f_k^*(y)=\underset{x\in R}{Sup}\,(xy-f_k(x))$$

1. Calculer $f_k^*(x)$ pour $k=2$.

2. Etudier la convexité de $f_k(x)$.

3. Calculer $f_k^*(y)$ pour tout $k>1$.

Exercice n° 5

Soit A une partie non vide de R^2 et $a\in A$. On définit alors l'ensemble suivant :

$$T(A,a)=\left\{u\in R^2 \,/\, \exists (x_n)\in A,\ \exists \lambda_n>0,\ x_n\to a,\ \lambda_n(x_n-a)\to u\right\}$$

1. Montrer que $(0,0)\in T(A,a)$.
2. Montrer que $T(A,a)$ est un ensemble stable par homothétie positive.
3. Montrer que $T(A,a)$ est un ensemble fermé de R^2.

4. Montrer que $T(A,a)$ est un ensemble convexe de R^2 si A est une partie convexe de R^2.
5. Soit $A = R^+ \times R^+$, expliciter $T(A,a)$ pour $a = (0,0)$.
6. Soit $A = \{(x,y) \in R^2 / x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \geq x^2,\ x \geq y^2\}$, expliciter $T(A,a)$ pour $a = (0,0)$.

Exercice n° 6

Etudier la série de terme général : $u_n = Ln(1+\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right))$ pour $\alpha > 0$

Exercice n° 7

Soit $Y = (y_1,...,y_n)$ un n-uplet de nombres réels positifs.

1. Résoudre le problème de minimisation suivant : $\underset{\alpha \in R}{Min} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha)^2$
2. Soit $X = (x_1,...,x_n)$ un autre n-uplet de valeurs positives réelles, trouver le nombre réel a solution du problème de minimisation suivant : $\underset{a \in R}{Min} \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i)^2$
3. Montrer que $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$
4. Montrer qu'il existe une unique solution, strictement positive, au problème de minimisation suivant : $\underset{\alpha \in R}{Min} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \alpha)^4$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Vous contracterez en 150 mots environ le texte suivant « Pour une dialectique des cultures » de Paul Ricœur. N'oubliez pas de préciser le nombre exact de mots utilisés à la fin de votre copie.

Pour une dialectique des cultures

Comment est possible une rencontre de cultures diverses, entendons : une rencontre qui ne soit pas mortelle pour tous ? Il paraît en effet ressortir des réflexions précédentes que les cultures sont incommunicables ; et pourtant l'étrangeté de l'homme pour l'homme n'est jamais absolue. L'homme est un étranger pour l'homme certes, mais toujours aussi un semblable.

Quand nous débarquons dans un pays tout à fait étranger, comme ce fut le cas pour moi, il y a quelques années en Chine, nous sentons que malgré le plus grand dépaysement nous ne sommes jamais sortis de l'espèce humaine ; mais ce sentiment reste aveugle, il faut l'élever au rang d'un pari et d'une affirmation volontaire de l'identité de l'homme. C'est ce pari raisonnable que tel égyptologue fit jadis quand découvrant des signes incompréhensibles, il posa en principe que si ces signes étaient de l'homme, ils pouvaient et devaient être traduits[1]. Certes dans une traduction tout ne passe pas, mais toujours quelque chose passe.

Il n'y a pas de raison, il n'y a pas de probabilité, qu'un système linguistique soit intraduisible. Croire la traduction possible jusqu'à un certain point, c'est affirmer que l'étranger est un homme, bref, c'est croire que la communication est possible. Ce qu'on vient de dire du langage – des signes – vaut aussi pour les valeurs, les images de base, les symboles qui constituent le fonds culturel d'un peuple. Oui, je crois qu'il est possible de comprendre par sympathie et par imagination l'autre que moi, comme je comprends un personnage de roman, de théâtre ou un ami réel mais différent de moi ; bien plus, je puis comprendre sans répéter, me représenter sans revivre, me faire autre en restant moi-même. Etre homme, c'est être capable de transfert dans un autre centre de perspective.

[1] Allusion à Champollion (1790 - 1832) qui déchiffra le premier des hiéroglyphes égyptiens.

Alors on se pose la question de confiance : qu'arrive-t-il à mes valeurs quand je comprends celles des autres peuples ? La compréhension est une aventure redoutable où tous les héritages culturels risquent de sombrer dans un syncrétisme[2] vague. Il me semble néanmoins que nous avons donné tout à l'heure les éléments d'une réponse fragile et provisoire : seule une culture vivante, à la fois fidèle à ses origines et en état de créativité sur le plan de l'art, de la littérature, de la philosophie, de la spiritualité, est capable de supporter la rencontre des autres cultures, non seulement de la supporter, mais de donner un sens à cette rencontre. Lorsque la rencontre est une confrontation d'impulsions créatrices, une confrontation d'élans, elle est elle-même créatrice. Je crois que, de création à création, il existe une sorte de consonance en l'absence de tout accord.

C'est lorsqu'on est allé jusqu'au fond de la singularité que l'on sent qu'elle consonne avec toute autre, d'une certaine façon qu'on ne peut pas dire, d'une façon qu'on ne peut pas inscrire dans un discours. Je suis convaincu qu'un monde islamique qui se remet en mouvement, un monde hindou dont les vieilles méditations engendreraient une jeune histoire, auraient avec notre civilisation, notre culture européenne, cette proximité spécifique qu'ont entre eux tous les créateurs. Je crois que c'est là que finit le scepticisme.

Rien par conséquent n'est plus éloigné de la solution de notre problème que je ne sais quel syncrétisme vague et inconsistant. Au fond les syncrétismes sont toujours des phénomènes de retombée ; ils ne comportent rien de créateur, ce sont de simples précipités historiques. Aux syncrétismes, il faut opposer la communication, c'est-à-dire une relation dramatique dans laquelle tour à tour je m'affirme dans mon origine et je me livre à l'imagination d'autrui selon son autre civilisation. La vérité humaine n'est que dans ce procès où les civilisations s'affronteront de plus en plus à partir de ce qui en elle est le plus vivant, le plus créateur. L'histoire des hommes sera de plus en plus une vaste explication où chaque civilisation développera sa perception du monde dans l'affrontement avec toutes les autres. Or, ce procès commence à peine. Il est probablement la plus grande tâche à venir.

Nul ne peut dire ce qu'il adviendra de notre civilisation quand elle aura véritablement rencontré d'autres civilisations autrement que par le choc de la conquête et de la domination. Mais il faut bien avouer que cette rencontre n'a pas encore eu lieu au niveau d'un véritable dialogue. C'est pourquoi nous sommes dans une sorte d'intermède, d'interrègne, où nous ne pouvons plus pratiquer le dogmatisme de la vérité unique et où nous ne sommes pas encore capables de vaincre le scepticisme dans lequel nous sommes entrés. Nous sommes dans le tunnel, au crépuscule du dogmatisme, au seuil des vrais dialogues.

Paul Ricœur, Revue *Esprit* – Oct. 1961

[2] André Lalande, dans son vocabulaire, définit le syncrétisme : « une réunion facile d'idées ou de thèses d'origine disparate ». Il s'applique ici plus particulièrement à la fusion indistincte ou au résidu incohérent de diverses cultures, à quoi s'opposent leur compréhension véritable, créatrice et profonde et la communication.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-REGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – SÉNÉGAL

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS STATISTICIENS ÉCONOMISTES

ISE Option Mathématiques

CALCUL NUMÉRIQUE

(Durée de l'épreuve : 2 heures)

Exercice 1.

Soient, pour tout n entier naturel non nul, les séries de terme général u_n et w_n définies par

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \\ w_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

1. La série de terme général w_n est-elle une série convergente ?
2. La série de terme général u_n est-elle une série convergente ?
3. Montrer que u_n et w_n sont des suites équivalentes lorsque n tend vers l'infini.
4. Y-a-t il contradiction entre les trois points précédents ? Justifiez soigneusement votre réponse.

Exercice 2.

On dit qu'un élément a réel est une valeur d'adhérence d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a.

Soit la suite définie pour tout $n \geq 0$ par

$$u_n = n\left(1 + (-1)^n\right).$$

1. Définir les sous-suites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indicées par les entiers pairs, et par les entiers impairs respectivement. Les calculer.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède-t elle une valeur d'adhérence ?
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t elle ?
4. Sous quelles conditions, une suite réelle ayant une valeur d'adhérence converge-t elle ?

Exercice 3.

Soit le système différentiel (*) suivant :

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} f'(x) & = & 3(f(x))^{\frac{2}{3}} \\ f(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

Les graphes de la figure **FIG.1** présentent les courbes représentatives $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4.

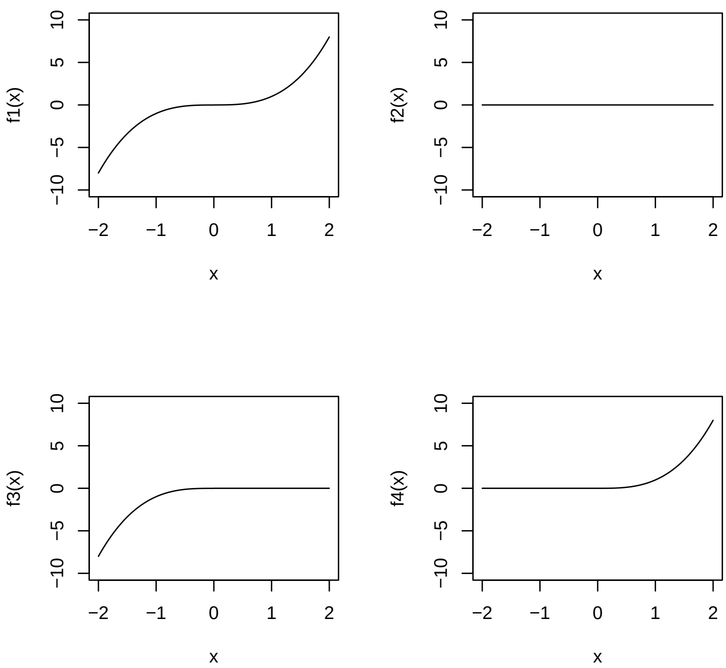

FIG. 1 – Courbes représentatives $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4.

1. A l'aide des graphes de la figure **FIG.1**, déterminer laquelle (lesquelles) des applications f_1, f_2, f_3 ou f_4 est (sont) solution (s) du système différentiel (*).
2. Y-a-t il contradiction avec le théorème de Cauchy-Lipschitz ?

Exercice 4.

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0;1]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq |x|$$

   (b) Montrer que f est continue sur tout $\mathbb{R}$.

   (c) Pour x non nul, la fonction f est-elle dérivable ? Dans l'affirmative, exprimer sa dérivée.

   (d) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{pour } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases} .$$

   Cette fonction g admet-elle une limite en 0 ?

   (e) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

2. Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in \{0\} \cup [1;+\infty[\cup \left(\bigcup_{n\geq 1}[\frac{1}{4^n};\frac{2}{4^n}[\right) \\ 4^n x - 2 & \text{pour } x \in \bigcup_{n\geq 1}[\frac{2}{4^n};\frac{3}{4^n}[\\ -4^n x + 4 & \text{pour } x \in \bigcup_{n\geq 1}[\frac{3}{4^n};\frac{1}{4^{n-1}}[\end{cases}$$

   enfin, $h(-x) = h(x)$.

   (a) Montrer que l'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$.

   (b) Tracer la courbe représentative de h pour $x \in [\frac{1}{16};\frac{3}{2}]$ dans un repère orthonormé (O, i, j) : une unité sera représentée par 10 cm en abscisse et 5 cm en ordonnée.

   (c) Calculer $h(\frac{3}{4^n})$. La fonction h est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier soigneusement la réponse.

   (d) Calculer en fonction de n les trois intégrales suivantes en utilisant au maximum la structure géométrique des courbes représentatives de ces fonctions

$$\int_{\frac{2}{4^n}}^{\frac{1}{4^{n-1}}} h(x)dx, \quad \int_{\frac{1}{4^n}}^{\frac{1}{4^{n-1}}} h(x)dx, \quad \int_{\frac{1}{4^n}}^{1} h(x)dx.$$

   (e) En déduire la valeur de $\int_0^1 h(x)dx$.

   (f) Soit y un réel positif. La fonction h est-elle intégrable sur $[0;y]$?

   (g) On pose

$$H(y) = \int_0^y h(x)dx.$$

      i. Montrer que la fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

      ii. Quelle est la dérivée de H ? Est-elle majorée ?

      iii. Calculer

$$H\left(\frac{1}{4^n}\right) \quad \text{et} \quad H\left(\frac{2}{4^n}\right).$$

iv. Soit

$$\mathcal{H}(x) = \frac{H(x)}{x}.$$

Calculer

$$\mathcal{H}\left(\frac{1}{4^n}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}\left(\frac{2}{4^n}\right).$$

La fonction $\mathcal{H}$ admet-elle une limite en 0 ?

(h) La fonction H est-elle dérivable en 0 ?